摘要

摘　要

众所周知，拟共形映射是共形映射的推广，调和映射是解析函数的推广，而双调和映射又是调和映射的推广．本文主要研究调和映射和双调和映射的有关性质．全文具体安排如下．

在第一章中，我们主要介绍研究问题的背景和主要结果．

在第二章中，借助 $L(F)$，我们证明了双调和映射的 *Landau* 常数和 *Bloch* 常数的存在性，其中 $L = z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$，$F$ 表示具有形式 $F(z) = |z|^2 G(z) + K(z)\ (|z| < 1)$ 的双调和映射，这里 G 和 K 都是调和映射．

在第三章中，我们的主要目的是获得一类双调和映射的 *Schwarz* 引理．利用所得结果，我们把 M. Mateljevic, M. Arenovic 和 V. Manojlovic 关于调和映射的相应结果推广到了双调和映射中．同时，我们还讨论了具有如下形式的双调和映射 $F(z) = \lambda_1 |z|^2 f(z) + \lambda_2 f(z)$ 的全凸性，其中 f 是调和映射，λ_1 和 λ_2 均为复常数．

第四章主要研究调和函数的 *Bloch* 空间并得到有关调和 $\alpha - Bloch$ 空间和调和 $\beta - Bloch$ 空间的一个结果．

在最后一章中，我们主要介绍极小曲面与调和映射之间的联系及著名的极小曲面曲率猜测．

关键词：调和映射，双调和映射，*Schwarz* 引理，*Landau* 常数，调和 *Bloch* 空间．

ABSTRACT

It is known that quasiconformal mappings are generalizations of conformal mappings. Also harmonic mappings are generalizations of analytic functions, and biharmonic mappings are generalizations of harmonic mappings.

The main aim of this dissertation is to discuss some properties of harmonic mappings and biharmonic mappings. It is arranged as follows.

In Chapter 1, we provide some backgrounds about our research and statements of our main results.

In Chapter 2, we show the existence of *Landau*'s and *Bloch*'s constants for biharmonic mappings with the aid of $L(F)$, where $L = z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ and L belongs to the class of biharmonic mappings of the form $F(z) = |z|^2 G(z) + K(z)$ $(|z| < 1)$, where G and K are harmonic.

In Chapter 3, our main aim is to obtain the *Schwarz* lemma for certain biharmonic mappings. By using the obtained results, we generalize M. Mateljevic, M. Arenovic and V. Manojlovic's corresponding result of harmonic mappings to the case of biharmonic mappings. Also we investigate the convexity of biharmonic mappings $F(z) = \lambda_1 |z|^2 f(z) + \lambda_2 f(z)$, where f are harmonic mappings, and λ_1 and λ_2 are constants.

知识水坝@pologoogle为您整理

In Chapter 4, we study the harmonic *Bloch* space and obtain a result on $\alpha-Bloch$ spaces and $\beta-Bloch$ spaces.

In the last chapter, we introduce the fundamental relationship between harmonic mappings and minimal surfaces, and state a famous conjecture about the curvatures of minimal surfaces.

Key words: Harmonic mapping, biharmonic mapping, *Schwarz* lemma, *Landau*'s constant, harmonic *Bloch* space

www.docin.com

知识水坝@pologoogle为您整理

湖南师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：陈力林　　　　2009年 6 月 1 日

湖南师范大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属湖南师范大学。同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权湖南师范大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在------年解密后适用本授权书。

2、不保密□。

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：陈力林　　日期：2009年 6月 1 日

导师签名：　　　　日期：2009年 6 月1 日

www.docin.com

1. 绪论

本章介绍研究问题的背景和得到的主要结果. 此章由以下五节构成.

1.1 双调和映射和双调和映射的研究背景

平面内的复值调和映射的实部和虚部都是调和的, 但其实部和虚部不一定满足 Cauchy-Riemann 方程, 因此平面复值调和映射是解析函数的推广. 虽然平面复值调和映射是解析函数的一种自然推广, 但是平面复值调和映射的研究起源于微分几何学中参数极小曲面的研究. 对平面复值调和映射的系统研究起步较晚, 直到二十世纪八十年代中期才引起广大数学工作者的极大关注. 代表作之一是 James Clunie 和 Terry Sheil-Small 在 1984 年发表的一篇论文 (见 [1]). 他们在文中给出了许多关于单叶调和映射和共形映射经典问题的类比结果, 并提出了许多关于单叶调和映射类似于共形映射的基本问题, 其中有些问题直到现在尚未解决. 经过二十多年的发展, 调和映射已发展成为复分析中的一个热门研究领域. 调和映射与拟共形映射、拟正则映射有着密切的联系 (见 [2, 3, 4, 5, 6]). 它在流体动力学、数学物理方程和图象处理等方面有着广泛的应用, 同时也是微分几何学中研究极小曲面的有力工具 (见 [7, 8, 9, 10, 11]). 双调和映射是定义在复平面内的某个子域的具有四次连续微分且它被 Laplace 算子作用后是调和的复值映射. 从定义知, 双调和映射是调和映射的推广, 而双调和映射的研究起源于物理学中的流体动力学、弹性力学等对复偏微分方程问题的研究, 它在工程力学和生物学有着许多重要应用. 详见文 [12, 13, 14, 15]. 双调和映射的研究是最近几年才兴起的, 相关方面的研究结果还比较少. 在研究平面调和映射的同时, 不少作者涉到了相应的高维调和映射 (见 [16, 17, 18, 19], 但是到目前为止这方面的研究还处于初期阶段. 特别是对相应的高维双调和映射的研究还几乎没有. 本文主要是研究平面调

和映射和双调和映射的一些基本性质以及它们之间的关系, 并在第三章给出了高维双调和映射的一些初步结果. 最后一章主要介绍调和映射和极小曲面之间的联系及著名的极小曲面曲率猜测.

1.2 调和映射和双调和映射的 Landau 定理

经典的 Landau 定理证明了对于单位圆盘内任意具有正规化条件 $f(0)=f'(0)-1=0$ 且 $|f(z)|<M$ 的解析函数 f, 一定存在常数 $\rho=\rho(M)>0$ 使得 f 在 $\mathbb{D}_\rho$ 内单叶且 $f(\mathbb{D}_\rho)$ 包含一个半经为 $M\rho^2$ 的单叶圆盘. 近年来许多作者研究了平面调和映射的 Landau 定理 (见 [20, 21, 22, 23]) 和平面双调和映射的 Landau 定理 (见 [24]). 陈怀惠等在文 [20] 中最先研究了平面调和映射的 Landau 定理, 他们的主要结果如下:

定理 CGH_1 ([20, 定理2]) 设 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的调和映射且满足 $f(0)=J_f(0)-1=0$ 和 $|f(z)|<M$. 则

(1) f 在单位圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_0}$ 单叶, 其中

$$\rho_0=\frac{\pi^3}{64mM^2}\ \ (m=\min_{0<r<1}\frac{3-r^2}{r(1-r^2)}\approx 6.85);$$

(2) $f(\mathbb{D}_{\rho_0})$ 包含一个单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_0}$, 其中

$$R_0=\frac{\pi}{8M}\rho_0=\frac{\pi^4}{512mM^3}.$$

www.docin.com

定理 CGH_2 ([20, 定理3]) 设 f 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的调和映射且满足 $f(0)=f_{\bar z}(0)=f_z(0)-1=0$ 和 $|f(z)|<M$. 则

(1) f 在单位圆盘 $\mathbb{D}_{\rho_0}$ 单叶, 其中

$$\rho_0=\frac{\pi^2}{16mM};$$

(2) $f(\mathbb{D}_{\rho_0})$ 包含一个单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_0}$, 其中

$$R_0=\frac{\rho_0}{2}=\frac{\pi^2}{32mM}.$$

Z. Abdulhadi 和 Y. Abu Muhanna 在 [24] 中研究了平面双调和映射的 Landau 定理, 主要结果如下:

定理 AA_1 ([24, 定理1]) 设 $F = |z|^2G + K$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 内的双调和映射, 其中 G 和 K 都是 $\mathbb{D}$ 中的调和映射且满足正规化条件 $F(0) = K(0) = 0$, $J_K(0) = 1$, $|G| < M$, $|K| < M$. 则存在常数 $0 < \rho_3 < 1$ 使得 F 在 $|z| < \rho_3$ 内是单叶的. 特别地 ρ_3 满足

$$\frac{\pi}{4M} - 2\rho_3 M - 2M\left(\frac{\rho_3^2}{(1-\rho_3)^2} + \frac{1}{(1-\rho_3)^2} - 1\right) = 0$$

且 $F(\mathbb{D}_{\rho_3})$ 包含一单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_3}$, 其中

$$R_3 = \frac{\pi\rho_3}{4M} - \frac{2M(\rho_3^3 + \rho_3^2)}{1-\rho_3}.$$

定理 AA_2 ([24, 定理2]) 设 G 是定义在 $\mathbb{D}$ 内的调和映射且满足正规化条件 $G(0) = 0$, $J_G(0) = 1$, $|G(z)| < M$. 则存在常数 $0 < \rho_4 < 1$ 使得 $F = |z|^2G$ 在圆盘 $|z| < \rho_4$ 内是单叶的, 其中 ρ_4 是方程

$$\frac{\pi}{4M} - \frac{4\rho_4 M}{1-\rho_4} - 2M\left(\frac{1}{(1-\rho_4)^2} - 1\right) = 0$$

的解, 并且 $F(\mathbb{D}_{\rho_4})$ 包含一单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_4}$, 其中

$$R_4 = \frac{\pi\rho_4^3}{4M} - \frac{2M\rho_4^4}{1-\rho_4}.$$

定义 1.2.1 C^1 类复值微分算子定义如下:

$$L = z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

我们应用调和映射的 *Schwarz* 引理和系数估计, 在文 [20, 24] 的基础上继续研究了两类特殊平面双调和映射的 Landau 定理. 我们的主要结果如下:

定理 2.2.1 设 $F = |z|^2G + K$ 是 $\mathbb{D}$ 内的双调和映射且 F 满足正规化条

件 $F(0)=K(0)=0,\ J_K(0)=1$, 其中 G 和 K 都是 $\mathbb{D}$ 内的调和映射. 如果 $|G|<M$ 且 $|K|<M$, 则存在常数 $\rho\ (0<\rho<1)$ 使得 $L(F)$ 在 $\mathbb{D}_\rho$ 内是单叶的, 其中 ρ 满足如下方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{6M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{4M\rho^3}{(1-\rho)^3}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho-\frac{4M\rho}{(1-\rho)^3}=0,$$

其中 $m_1\approx 6.059$ 是函数

$$\frac{2-x^2+\frac{4}{\pi}\arctan x}{x(1-x^2)},\ (0<x<1)$$

的最小值, 取得最小值时 $x\approx 0.588$. 而且 $L(F)(\mathbb{D}_\rho)$ 包含一个单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_1}$, 其中

$$R_1=\rho\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{2M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho\right].$$

定理 2.2.3 设 $F=|z|^2G$ 是 $\mathbb{D}$ 内的双调和映射且 G 满足正规化条件 $G(0)=0,\ J_G(0)=1$, 其中 G 是 $\mathbb{D}$ 内的调和映射. 如果 $|G|<M$, 则存在常数 $\rho\ (0<\rho<1)$ 使得 $L(F)$ 在 $\mathbb{D}_\rho$ 内是单叶的, 则存在常数 $\rho\ (0<\rho<1)$ 使得 $L(F)$ 在 $\mathbb{D}_\rho$ 内是单叶的, 其中 ρ 满足如下方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{48M}{\pi^2}m_1\arctan\rho-\frac{2M\rho}{(1-\rho)^3}=0,$$

其中 m_1 和定理 2.2.1 中的 m_1 相同, 而且 $L(F)(\mathbb{D}_\rho)$ 包含一单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_2}$, 此处

$$R_2=\rho^3\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho\right].$$

1.3 一类双调和映射的几何性质

定义 1.3.1: 对于 $n\geq 2$, 定义

$$P[\phi](x)=\int_{S^{n-1}}P(x,\xi)\phi(\xi)d\sigma(\xi),\ x\in\mathbb{B}^n,$$

其中 $P(x,\xi)=\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}$ 是定义在单位球 $\mathbb{B}^n$ 上的 Poisson 核, $d\sigma$ 是单位球面上的正规化曲面测度, ϕ: $S^{n-1}\to R^n$ 是连续映射.

M. Arenović, V. Kojić 和 M. Mateljević 在文 [25] 中证明了如下结果:

定理 MKM 假设 ϕ: $\mathbf{S}^{n-1}\mapsto\mathbf{R}^n$ 满足 Lipschitz 条件: 对 ξ, $\eta\in\mathbf{S}^{n-1}$,

$$|\phi(\xi)-\phi(\eta)|\le L|\xi-\eta|$$

并且它的调和扩张 $u=P[\phi]$: $\mathbb{B}^n\mapsto\mathbf{R}^n$ 是 k- 拟正则的. 则对 x, $y\in\mathbb{B}^n$,

$$|u(x)-u(y)|\le c'|x-y|,$$

其中 c' 仅与 L, K 和 n 有关.

最近, M. Mateljević, M. Arenović 和 V. Manojlović 改进定理 MKM 成如下形式 (见 [18]).

定理 MAM 设 h : $\overline{\mathbb{B}^n}\mapsto\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中调和并在 $\overline{\mathbb{B}^n}$ 上连续. 则对于任意的 $x\in\mathbb{B}^n$ 和 $\mathbb{S}_r^{n-1}$ 上的切向量 T, 如下条件是等价的:

(a) $|h(x)-h(y)|\le m|x-y|$, x, $y\in\mathbf{S}^{n-1}$.

(b) $|h'(x)\mathrm{T}|\le M$,

其中 $r=|x|$. 另外, 如果 h 是 K- 拟正则映射, 则对于任意的 $x\in\mathbb{B}^n$ 有

$$|h'(x)|\le Km.$$

我们利用构造的方法把上叙结果推广到了双调和映射情形, 主要结果如下.

定理 3.2.5 设 F 是定义在 $\mathbb{B}^n$ 内且在 $\overline{\mathbb{B}^n}$ 上连续的具有四次连续微分的函数并满足 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1|x|^2G(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda_2G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中 G 是调和映射且 λ_1,λ_2 是实常数并满足 $\lambda_1+\lambda_2\neq0$. 若 F : $\overline{\mathbb{B}^n}\mapsto\mathbb{R}^n$, 则对于任意的 $x\in\mathbb{B}^n$ 和 $\mathbb{S}_r^{n-1}$ 上的切向量 T, 如下条件等价:

(e) $|F(x)-F(y)|\le m|x-y|$, x, $y\in\mathbf{S}^{n-1}$

www.docin.com

(f) $|G'(x)\mathrm{T}| \le M$, 其中 $r = |x|$. 如果 G 还是 K- 拟正则映射, 则对于任意的 $x \in \mathbb{B}^n$ 有

(g) $|G'(x)| \le \frac{Km}{|\lambda_1+\lambda_2|}$.

定义 3.3.1 定义在单位圆盘上的调和映射 f 是全凸的当且仅当 f 把每一个圆周 $|z| = r < 1$ 都一一的映成凸曲线.

对于平面情形, 我们还有如下结果:

定理 3.3.2 设 $f = h + \overline{g}$ 是 $\mathbb{D}$ 内局部单叶保向的调和映射, 其中 h 和 g 是解析的. 则 $F(z) = \lambda_1|z|^2 f(z) + \lambda_2 f(z)$ 是全凸的当且仅当 $f(z)$ 是全凸的, 其中 $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

1.4 调和映射的 *Bloch* 空间

类似于解析函数的 *Bloch* 范数, 定义调和映射的 *Bloch* 范数如下.

定义 4.1.1 设 $f = h + \overline{g}$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 内的调和映射, 其中 h 和 g 是 $\mathbb{D}$ 内的解析 (全纯) 函数. 我们称

$$||f||_{HB} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)(|h'|+|g'|)+|f(0)| < \infty$$

为 f 的调和 *Bloch* 范数 (记作 HB_f), 其中 f 为调和 *Bloch* 函数.

定义 4.1.2 在定义 4.1.1 的假设条件下, 我们称

$$||f||_{HB^\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha(|h'|+|g'|)+|f(0)| < \infty$$

为 f 的调和 $\alpha - Bloch$ 范数 (记作 HB_f^α), 其中 f 为调和 $\alpha - Bloch$ 函数. 显然调和 *Bloch* 范数是解析函数 *Bloch* 范数的推广, 即当定义 4.1.1 中 $g \equiv 0$ 时就是解析函数的 *Bloch* 范数的定义.

陈怀惠等在文 [27] 中得到如下定理:

定理 CG 设 $\beta \ge 1$ 且 $\alpha \le \beta$. 则 C_ϕ 是从 B^α 到 B^β 的有界算子; 若 $\alpha < \beta$ 时, C_ϕ 没有下界.

类似于定理 CG, 关于调和映射, 我们得到如下结果:

定理 4.2.1 设 $\beta \ge 1$ 且 $\alpha \le \beta$, 则 HC_ϕ 是 HB^α 到 HB^β 的有界算子. 若 $\alpha < \beta$, 则算子 HC_ϕ 没有下界.

www.docin.com

1.5 调和映射与极小曲面的联系

定义 5.1.7 一个曲面如果它每一点处的平均曲率 $H=0$, 则称其为极小曲面. 非参数极小曲面称为极小图. 在等温参数坐标下, 极小曲面的高斯曲率([32, P_{184}])

$$K=-\frac{|\omega'|^2}{|h'g'|(1+|\omega|)^4}.$$

下面是著名的极小曲面曲率猜测.

猜测 5.2.1 如果极小曲面 S 的平面投影是单位圆盘到单位圆盘的调和同胚映射, 则此曲面在原点的高斯曲率满足不等式

$$|K|<\frac{\pi}{2}=4.934\cdots.$$

事实上猜测 5.2.1 等价于如下形式:

猜测 5.2.2 设 f 是定义在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的调和映射且满足 $f(\mathbb{D})=\mathbb{D}$ 以及 $\omega=\overline{f}_{\bar{z}}/f_z=q^2$, 其中 q 是 $\mathbb{D}$ 上的解析函数. 则

$$|f_z(0)|+|f_{\bar{z}}(0)|>\frac{8}{\pi^2},$$

其中 $\frac{8}{\pi^2}$ 是最好的界.

www.docin.com

2. 两类双调和映射的 Landau 定理

2.1 引言

定义在复平面 $\mathbb{C}$ 内某个子域 D 的二次连续可微复值函数 $f = u+iv$ 是调和的当且仅当 f 满足 *Laplace* 方程 $\Delta f = 0$, 其中 Δ 表示 *Laplace* 算子

$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z\partial \overline{z}}.$$

定义在复平面 $\mathbb{C}$ 内某个子域 D 的四次连续可微复值函数 $F = u+iv$ 是双调和的当且仅当 F 满足双 *Laplace* 方程 $\Delta(\Delta F) = 0$. 双调和函数的研究产生于某些物理问题, 特别是流体动力学和弹性问题. 它在工程力学和生物学有着许多重要应用. 详见文 [12, 13, 14, 15]. 由文 [24, 28, 29] 知, 如果 $D \subset \mathbb{C}$ 是单连通域, 则复值函数 F 是双调和的当且仅当 F 有如下表示:

$$F = |z|^2 G + K,$$

其中 G 和 K 都是复值调和映射. 又由文 [20, 24, 28, 29] 知, G 和 K 有如下表示:

$$G = g_1 + \overline{g_2}$$

和

$$K = k_1 + \overline{k_2},$$

其中 g_1, g_2, k_1 和 k_2 是 D 中的解析函数. f 的 Jacobi J_f 定义如下:

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2.$$

我们引进如下两个记号:

$$\lambda_f = ||f_z| - |f_{\overline{z}}||, \ \Lambda_f = |f_z| + |f_{\overline{z}}|.$$

由定义知: 如果 $J_f \geq 0$, 则 $J_f = \lambda_f \Lambda_f$. 在文 [29] 中, 作者引进了如下 C^1 类复值微分算子:

$$L = z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

www.dusin.com

显然, L 是一复线性算子且满足通常的乘积运算法则如下：

$$L(af+bg)=aL(f)+bL(g)$$

和

$$L(fg)=fL(g)+gL(f),$$

其中 a, b 和 f, g 分别是复常数和 C^1 函数. 另外算子 L 具有许多有趣的性质. 例如：算子 L 保调和和双调和性. 它的更多相关性质可参见文 [29]. 本文引进如下记号：

$$\mathbb{D}_r=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<r\},\ \mathbb{D}=\mathbb{D}_1.$$

2.2 双调和映射的 Landau 定理

Z. Abdulhadi 等在 [29] 中得到如下结果.

定理 *AA* ([29, 推论1(3)]) 设 F 是 $\mathbb{D}$ 中的单叶双调和映射. 如果 F 是凸的且 $L(F)$ 是单叶的, 则 $L(F)$ 是星形的.

从定理 *AA* 知, $L(F)$ 的性质非常类似于解析函数 $zf'(z)$ 的性质. 例如：若 F 是单叶双调和的, 则 F 是星形的当且仅当 $Re(L(F)(z)/F(z))\geq 0$. 另外在文 [29] 中作者还给了一个关于凸函数的类似刻画.

经典的 Landau 定理证明了对于单位圆盘内任意具有正规化条件 $f(0)=f'(0)-1=0$ 且 $|f(z)|<M$ 的解析函数 f, 一定存在常数 $\rho=\rho(M)>0$ 使得 f 在 $\mathbb{D}_\rho$ 单叶且 $f(\mathbb{D}_\rho)$ 包含一个半经为 $M\rho^2$ 的圆盘. 近年来, 许多作者研究了平面调和映射的 Landau 定理 (见 [20, 21, 22, 23]) 和平面双调和映射的 Landau 定理 (见 [1]). 从定理 *AA* 知, 研究 $L(F)$ 的 Landau 定理是非常有意义的, 其中 F 属于某类双调和映射. 对此问题, 我们的主要结果如下：

定理 2.2.1 设 $F=|z|^2G+K$ 是 $\mathbb{D}$ 内的双调和映射且 F 满足正规化条件 $F(0)=K(0)=0,\ J_K(0)=1$, 其中 G 和 K 都是 $\mathbb{D}$ 内的调和映射. 如

果 $|G|<M$ 且 $|K|<M$, 则存在常数 $\rho\,(0<\rho<1)$ 使得 $L(F)$ 在 $\mathbb{D}_\rho$ 内是单叶的, 其中 ρ 满足如下方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{6M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{4M\rho^3}{(1-\rho)^3}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho-\frac{4M\rho}{(1-\rho)^3}=0,$$

其中 $m_1\approx 6.059$ 是函数

$$\frac{2-x^2+\frac{4}{\pi}\arctan x}{x(1-x^2)},\ (0<x<1)$$

的最小值. 取得最小值时 $x\approx 0.588$. 而且 $L(F)(\mathbb{D}_\rho)$ 包含一个单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_1}$, 其中

$$R_1=\rho\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{2M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho\right].$$

注记 2.2.2 $L(F)$ 不保有界性.

我们的下一个结果给出的是当 $K=0$ 时 $L(F)$ 的 Landau 定理而且此结果不同于定理 2.2.1 . 这是因为当 $K=0$ 时, *Jacobi* $J_K(0)=0$. 因此我们必须用假设 $J_G(0)=1$ 来代替.

定理 2.2.3 设 $F=|z|^2G$ 是 $\mathbb{D}$ 内的双调和映射且 G 满足正规化条件 $G(0)=0,\ J_G(0)=1$, 其中 G 是 $\mathbb{D}$ 内的调和映射. 如果 $|G|<M$, 则存在常数 $\rho\,(0<\rho<1)$ 使得 $L(F)$ 在 $\mathbb{D}_\rho$ 内是单叶的, 则存在常数 $\rho\,(0<\rho<1)$ 使得 $L(F)$ 在 $\mathbb{D}_\rho$ 内是单叶的, 其中 ρ 满足如下方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{48M}{\pi^2}m_1\arctan\rho-\frac{2M\rho}{(1-\rho)^3}=0,$$

其中 m_1 和定理 2.2.1 中的 m_1 相同. 而且 $L(F)(\mathbb{D}_\rho)$ 包含一圆盘 $\mathbb{D}_{R_2}$, 其中

$$R_2=\rho^3\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho\right].$$

现用 ρ_1 和 ρ_2 分别表示定理 2.2.1 和定理 2.2.3 中的 ρ. 表格 2.1 的左边, 我们分别取不同的 M, 得到与之对应的不同的 ρ_1 和 R_1. 这些值都是用 Mathematica 软件得到的.

注记 2.2.4 定理 2.2.1 和 2.2.3 中的 ρ 和 R 均不是最好的估计.

M	ρ_1	R_1	M	ρ_3	R_3
1/5	0.439254	1.25997	1/5	0.6297500	1.7747543
1/4	0.373493	0.779139	1/4	0.5583439	1.2041018
1/3	0.285344	0.3823	1/3	0.4558189	0.7034390
1/2	0.170483	0.11920	1/2	0.3053327	0.3044329
1	0.0527603	0.0137919	1	0.1111922	0.0564158
2	0.0139439	0.00164501	2	0.0313502	0.0081254
3	0.00626141	0.000482413	3	0.0142671	0.0024785

表 2.1 表格的左栏和右栏分别是对应的定理 2.2.1 和定理 AA_1.

我们现用 Mathematica 软件给出一些计算数据来比较我们的结果(定理 2.2.1 和定理 2.2.3) 和文 [24] 中相对应的两个结果. 它们分别是表格 2.1 和表格 2.2

文 [24] 中对应的两个结果如下:

定理 AA_1([24, 定理1]) 设 $F = |z|^2G + K$ 是定义在 $\mathbf{D}$ 内的双调和映射, 其中 G 和 K 都是 $\mathbb{D}$ 中的调和映射且满足正规化条件 $F(0) = K(0) = 0$, $J_K(0) = 1$, $|G| < M$, $|K| < M$. 则存在常数 $0 < \rho_3 < 1$ 使得 F 在 $|z| < \rho_3$ 内是单叶的. 特别地 ρ_3 满足

$$\frac{\pi}{4M} - 2\rho_3 M - 2M\left(\frac{\rho_3^2}{(1-\rho_3)^2} + \frac{1}{(1-\rho_3)^2} - 1\right) = 0$$

且 $F(\mathbf{D}_{\rho_3})$ 包含一单叶圆盘 $\mathbf{D}_{R_3}$, 其中

$$R_3 = \frac{\pi\rho_3}{4M} - \frac{2M(\rho_3^3 + \rho_3^2)}{1-\rho_3}.$$

这个定理中的估计也不是最好的.

定理 AA_2([24, 定理2]) 设 G 是定义在 $\mathbf{D}$ 内的调和映射且满足正规化条件 $G(0) = 0$, $J_G(0) = 1$, $|G(z)| < M$. 则存在常数 $0 < \rho_4 < 1$ 使得 $F = |z|^2G$ 在圆盘 $|z| < \rho_4$ 内是单叶的. ρ_4 是方程

$$\frac{\pi}{4M} - \frac{4\rho_4 M}{1-\rho_4} - 2M\left(\frac{1}{(1-\rho_4)^2} - 1\right) = 0$$

M	ρ_2	R_2	M	ρ_4	R_4
1/5	0.475023	0.327539	1/5	0.6319723	0.8178143
1/4	0.352112	0.100853	1/4	0.5468429	0.4150664
1/3	0.213284	0.016184	1/3	0.4268902	0.1446679
1/2	0.09787	0.00102335	1/2	0.2648429	0.0224877
1	0.0248388	8.29764×10^{-6}	1	0.0874886	0.0003975
2	0.00623202	6.54152×10^{-8}	2	0.0238139	3.9855978×10^{-6}
3	0.00277162	3.84502×10^{-9}	3	0.0107616	2.4493944×10^{-7}

表 2.2 表格的左栏和右栏分别是对应的定理 2.2.2 和定理 AA_2.

的解, 并且 $F(\mathbb{D}_{\rho_4})$ 包含一单叶圆盘 $\mathbb{D}_{R_4}$, 其中

$$R_4=\frac{\pi\rho_4^3}{4M}-\frac{2M\rho_4^4}{1-\rho_4}.$$

这个定理的估计亦不是最好的.

在给出定理 2.2.1 和定理 2.2.3 的证明之前, 先介绍一些引理, 它们对定理的证明起着重要的作用.

引理 CX ([20, 23, 30]) 设 f 是 $\mathbb{D}$ 内的调和映射并满足 $f(0)=0$ 及 $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$. 对于任意的 $z\in\mathbb{D}$, 则有

$$\Lambda_f(z)\le\frac{4}{\pi}\frac{(1+|f(z)|)}{(1-|z|^2)},$$

且

$$|f(z)|\le\frac{4}{\pi}\arctan|z|\le\frac{4}{\pi}|z|.$$

引理 CX 中的第二个不等式是 Heinz (见 [30], Lemma) 得到的. 由引理 CX 和 Heinz 引理, 我们有如下推论:

推论 2.2.5 设 f 是 $\mathbb{D}$ 内的调和映射并满足 $f(0)=0$ 及 $f(\mathbb{D})=\mathbb{D}$. 则有

$$\sqrt{c}\le|f_z(0)|+|f_{\bar z}(0)|\le\frac{4}{\pi},$$

其中 c 是绝对正常数.

在文 [31] 中, Hall 证明了 c 的最大上界是 $\frac{27}{4\pi^2}$. 如下是文 [23] 中关于调和映射系数估计的一个结果.

引理 XZ 设 $f=h+\overline{g}$ 是 $\mathbb{D}$ 内的调和映射且 $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$, $|f(z)|\leq M$. 对于 $n\geq 1$,

$$|a_n|,\ |b_n|\leq M.$$

上式等号成立当且仅当 $f_0(z)=Mz^n$ 或 $f_1(z)=M\overline{z}^n$.

由引理 XZ, 可以立即得到如下推论:

推论 2.2.6 设 $f=h+\overline{g}$ 是 $\mathbb{D}$ 内具有 n 次连续微分的调和映射. 如果 $h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$, $|f(z)|\leq M$, 则对于任意的 $n\geq 1$ 和 $z\in\mathbb{D}$ 有,

$$|\frac{\partial^n f}{\partial z^n}|\leq\frac{n!M}{(1-|z|)^{n+1}},\ |\frac{\partial^n f}{\partial\overline{z}^n}|\leq\frac{n!M}{(1-|z|)^{n+1}}.$$

如下两个引理是显然的.

引理 2.2.7 设 M 和 q 是两个正实常数. 则函数

$$f(x)=6M\frac{x^2}{(1-x)^2}+4M\frac{x^3}{(1-x)^3}+\frac{16M}{\pi^2}q\arctan x+4M\frac{x}{(1-x)^3}$$

在 $[0,1]$ 内是连续的且严格单调递增的并满足 $f(0)=0$ 及 $\lim_{x\to 1}f(x)=\infty$.

引理 2.2.8 设 M 和 q 是两个正实常数. 则函数

$$g(x)=\frac{48M}{\pi^2}q\arctan x+4M\frac{x}{(1-x)^3}$$

在 $[0,1]$ 内是连续的且严格单调递增的并满足 $g(0)=0$ 及 $\lim_{x\to 1}g(x)=\infty$.

定理 2.2.1 的证明: 设 $F=|z|^2G+K$. 因为 L 是线性的且 $L(|z|^2)=0$, 所以对于任意的 $z\in\mathbb{D}$ 可假定 $H:=L(F)=|z|^2L(G)+L(K)$, 其中 $G(z)=g_1+\overline{g_2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}\overline{z}^n$, 且 $K(z)=k_1+\overline{k_2}=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{d_n}\overline{z}^n$. 则

$$H_z=2|z|^2G_z+|z|^2zG_{zz}-\overline{z}^2G_{\overline{z}}+K_z+zK_{zz}$$

且

$$H_{\overline{z}} = -2|z|^2G_{\overline{z}} - |z|^2\overline{z}G_{\overline{z}\overline{z}} + z^2G_z - K_{\overline{z}} - \overline{z}K_{\overline{z}\overline{z}}.$$

易知 $J_H(0) = J_K(0) = 1$. 因为 G 和 K 是 $\mathbf{D}$ 内的调和映射, 由引理 XZ 知. 对于任意的 $n \geq 1$ 有,

$$|a_n|, |b_n|, |c_n|, |d_n| \leq M.$$

特别地,

$$|a_n| + |b_n| \leq 2M \text{ 和 } |c_n| + |d_n| \leq 2M.$$

定义

$$p(x) = \frac{2 + \frac{4}{\pi}\arctan x - x^2}{(1-x^2)x} \ (0 < x < 1).$$

则存在 r_0, $(0 < r_0 < 1)$, 使得

$$p(r_0) = \min_{0<x<1} p(x).$$

对于 θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 及 $z \in \mathbf{D}$, 函数

$$K_\theta(z) = K_z - K_z(0) + (K_{\overline{z}} - K_{\overline{z}}(0))e^{i(\pi-2\theta)},$$

是调和的且满足 $K_\theta(0) = 0$. 对于任意的 $z \in \mathbf{D}$, 由引理 CX 知：

$$\Lambda_K(z) \leq \frac{4M}{\pi}\left(\frac{1 + \frac{4}{\pi}\arctan|z|}{1-|z|^2}\right).$$

特别地, 对于任意的 $z \in \mathbf{D}$ 由上面的不等式可得

$$|K_\theta(z)| \leq \Lambda_K(z) + \Lambda_K(0) \leq \frac{4M}{\pi}\left(1 + \frac{1 + \frac{4}{\pi}\arctan|z|}{1-|z|^2}\right) = \frac{4M}{\pi}|z|p(|z|).$$

因为 $xp(x) - 1 = \frac{1+\frac{4}{\pi}\arctan x}{1-x^2}$ 是一个关于 x 在 $(0,1)$ 中的递增函数. 所以上叙不等式证明了对于任意的 $z \in \mathbf{D}_{r_0}$ 有,

$$|K_\theta(z)| \leq \frac{4M}{\pi}m_0, \ \ m_0 = \frac{2 + \frac{4}{\pi}\arctan r_0 - r_0^2}{1-r_0^2}.$$

下一步我们考虑定义在 $\mathbf{D}$ 的映射 F, 其中

$$F(z) = \frac{\pi}{4Mm_0}K_\theta(r_0 z).$$

由引理 CX 知, 对于 $F(z)$ 和任意的 $z\in\mathbb{D}_{r_0}$ 有,

$$|K_\theta(z)|\le\frac{16M}{\pi^2}m_0\arctan\left(\frac{|z|}{r_0}\right)\le\frac{16M}{\pi^2}m\arctan|z|,$$

其中 $m=\frac{1}{r_0}m_0$. 而 $J_F(0)=|K_z(0)|^2-|K_{\overline{z}}(0)|^2=J_K(0)=1$. 即 $\lambda_K(0)=\frac{1}{\Lambda_K(0)}$. 由此, 由引理 CX 知,

$$\lambda_K(0)\ge\frac{\pi}{4M}\ \text{and}\ 1=J_K(0)\le\Lambda_K^2(0)\le\frac{16M^2}{\pi^2}.$$

先固定 $\rho\ (0<\rho\le\frac{\pi^3}{64mM^2}\le r_0)$. 为了证明 H 的单叶性, 任取单位圆盘 $\mathbb{D}_\rho$ 中的两个点 z_1,z_2, 定义 $z:=\gamma(t)=(z_2-z_1)t+z_1\ (0\le t\le 1)$ 和 $z_2-z_1=|z_1-z_2|e^{i\theta}$. 应用引理 CX 和引理 XZ, 我们估计如下等式的模

$$H(z_1)-H(z_2)=\int_\gamma H_z(z)dz+H_{\overline{z}}(z)d\overline{z},$$

其中积分路径是所有连接点 z_1,z_2 的曲线 $(\gamma=[z_1,z_2])$. 我们有如下估计:

$$\begin{aligned}
|H(z_1)-H(z_2)| &= \left|\int_\gamma H_zdz+H_{\overline{z}}d\overline{z}\right|\\
&\ge \left|\int_\gamma K_z(0)dz-K_{\overline{z}}(0)d\overline{z}\right|-2\left|\int_\gamma |z|^2(G_zdz-G_{\overline{z}}d\overline{z})\right|\\
&\quad-\left|\int_\gamma |z|^2(zG_{zz}dz-\overline{z}G_{\overline{z}\overline{z}}d\overline{z})\right|-\left|\int_\gamma zK_{zz}dz-\overline{z}K_{\overline{z}\overline{z}}d\overline{z}\right|\\
&\quad-\left|\int_\gamma z^2G_zd\overline{z}-\overline{z}^2G_{\overline{z}}dz\right|\\
&\quad-\left|\int_\gamma (K_z-K_z(0))dz-(K_{\overline{z}}-K_{\overline{z}}(0))d\overline{z}\right|\\
&\ge |z_1-z_2|\left\{\lambda_K(0)-2\sum_{n=1}^\infty n(|a_n|+|b_n|)\rho^{n+1}\right.\\
&\quad-\sum_{n=2}^\infty n(n-1)(|a_n|+|b_n|)\rho^{n+1}-\sum_{n=2}^\infty n(n-1)(|c_n|+|d_n|)\rho^{n-1}\\
&\quad\left.-\sum_{n=1}^\infty n(|a_n|+|b_n|)\rho^{n+1}-\frac{16M}{\pi^2}m\arctan\rho\right\}\\
&> |z_1-z_2|\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{6M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{4M\rho^3}{(1-\rho)^3}\right.\\
&\quad\left.-\frac{16M}{\pi^2}m\arctan\rho-\frac{4M\rho}{(1-\rho)^3}\right].
\end{aligned}$$

由引理 2.2.7 知, 存在唯一的 $\rho\in(0,1)$ 满足如下方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{6M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{4M\rho^3}{(1-\rho)^3}-\frac{16M}{\pi^2}m\arctan\rho-\frac{4M\rho}{(1-\rho)^3}=0.$$

这意味着 $|H(z_1)-H(z_2)|>0$ 对于 $|z|<\rho$ 中任意两个不同的点 z_1,z_2, $L(F)$ 在圆盘 $\mathbb{D}_\rho$ 内单叶.

最后, 采用相同的方法我们考虑对于任意的 z 满足 $|z|=\rho$, 有下列不等式成立.

$$\begin{aligned}|H(z)| &= \left||z|^2(zG_z-\overline{z}G_{\overline{z}})+(zK_z-\overline{z}K_{\overline{z}})\right|\\ &\geq |zK_z(0)-\overline{z}K_{\overline{z}}(0)|-|z(K_z-K_z(0))-\overline{z}(K_{\overline{z}}-K_{\overline{z}}(0))|\\ &\quad -\left||z|^2(zG_z-\overline{z}G_{\overline{z}})\right|\\ &\geq \rho\left[\frac{\pi}{4M}-\frac{2M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{16M}{\pi^2}m\arctan\rho\right]=R_1.\end{aligned}$$

定理 2.2.1 证毕. □

定理 2.2.3 的证明: 设 G 是定义在 $\mathbb{D}$ 内的调和映射. 则我们可假设对于任意的 $z\in\mathbb{D}$ 有, $G(z)=g_1(z)+\overline{g_2(z)}$, 其中 $g_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, $g_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$, 且 $J_G(0)=|a_1|^2-|b_1|^2=1$. 由 G 的假设和引理 CX 知, $\Lambda_G(0)\leq\frac{4M}{\pi}$. 令 $H(z)=L(F)=|z|^2L(G)$. 则

$$H_z=2|z|^2G_z-\overline{z}^2G_{\overline{z}}+z|z|^2G_{zz}$$

且

$$H_{\overline{z}}=-2|z|^2G_{\overline{z}}+z^2G_z-\overline{z}|z|^2G_{\overline{z}\overline{z}}.$$

固定 ρ 且 ρ 满足 $0<\rho\leq\frac{\pi^3}{64mM^2}\leq r_0$, 其中 m 是和定理 2.2.1 的证明中出现的 m 相同. 任取单位圆盘 $\mathbb{D}_\rho$ 中的两个点 z_1,z_2, 定义 $z:=\gamma(t)=(z_2-z_1)t+z_1$ $(0\leq t\leq 1)$ 和 $z_2-z_1=|z_1-z_2|e^{i\theta}$.

应用引理 CX 和引理 XZ, 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned}
|H(z_1)-H(z_2)| &= \left|\int_{[z_1,z_2]} H_z dz + H_{\overline{z}} d\overline{z}\right| \\
&= \left|\int_{[z_1,z_2]} 2|z|^2(G_z dz - G_{\overline{z}} d\overline{z}) + (z^2 G_z d\overline{z} - \overline{z}^2 G_{\overline{z}} dz)\right. \\
&\quad \left. + |z|^2(zG_{zz} dz - \overline{z} G_{\overline{z}\overline{z}} d\overline{z})\right| \\
&\geq \left|\int_{[z_1,z_2]} [G_z(0)(2|z|^2 dz + z^2 d\overline{z}) - G_{\overline{z}}(0)(2|z|^2 d\overline{z} - \overline{z}^2 dz)]\right| \\
&\quad -2\left|\int_{[z_1,z_2]} |z|^2 [(G_z - G_z(0))dz - (G_{\overline{z}} - G_{\overline{z}}(0))] d\overline{z}\right| \\
&\quad -\left|\int_{[z_1,z_2]} |z|^2 \left(\frac{z}{\overline{z}}(G_z - G_z(0))d\overline{z} - \frac{\overline{z}}{z}(G_{\overline{z}} - G_{\overline{z}}(0))dz\right)\right| \\
&\quad -\left|\int_{[z_1,z_2]} |z|^2(zG_{zz} dz - \overline{z} G_{\overline{z}\overline{z}} d\overline{z})\right| \\
&\geq |z_1 - z_2| \left(\int_0^1 |z|^2 dt\right) \left\{\frac{\pi}{4M} - \frac{48M}{\pi^2} m \arctan \rho\right. \\
&\quad \left. -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(|a_n| + |b_n|)\rho^{n-1}\right\} \\
&> |z_1 - z_2| \left(\int_0^1 |z|^2 dt\right) \left[\frac{\pi}{4M} - \frac{48M}{\pi^2} m \arctan \rho - \frac{4M\rho}{(1-\rho)^3}\right].
\end{aligned}$$

由引理 2.2.8 知, 在 $(0,1)$ 中存在唯一的 ρ 满足如下方程

$$\frac{\pi}{4M} - \frac{48M}{\pi^2} m \arctan \rho - \frac{4M\rho}{(1-\rho)^3} = 0.$$

这意味着 $H(z_1) \neq H(z_2)$ 且 $H(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内单叶.

而且对于任意的 z 满足 $|z| = \rho$ 有,

$$\begin{aligned}
|H(z)| &= |L(|z|^2 G)| \\
&\geq \left||z|^2(zG_z(0) - \overline{z} G_{\overline{z}}(0))\right| - \left||z|^2[z(G_z - G_z(0)) - \overline{z}(G_{\overline{z}} - G_{\overline{z}}(0))]\right| \\
&\geq \rho^3 \left[\frac{\pi}{4M} - \frac{16M}{\pi^2} m \arctan \rho\right] = R_2.
\end{aligned}$$

定理 2.2.3 证毕. □

3. 一类双调和映射的几何性质

3.1 引言

在本章中, 我们用 $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n$ 和 $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{n-1}$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球和单位球面. 特别地, 我们用 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{T}$ 分别代替 $\mathbb{B}^2$ 和 $\mathbb{S}^1$. 平面调和映射 $f(z)$ 是定义在域 $D \subset \mathbb{C}$ 内的复值调和函数, 其中 $z = x + iy$. 若 D 是单连通的, 则 $f(z)$ 有如下标准分解:

$$f = h + \overline{g},$$

其中 h 和 g 在 D 内是解析 (全纯) 的. 定义在域 $D \subset \mathbb{C}$ 中的具有四次连续微分的复值函数 F 是双调和的当且仅当 ΔF 是调和的, 即 F 满足双调和方程 $\Delta(\Delta F) = 0$, 其中 Δ 是 Laplace 算子并有

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

双调和映射的研究产生于某些物理问题, 特别是流体动力学和弹性问题. 它在工程力学和生物学有着许多重要应用. 详见文 [12, 13, 14, 15]. 由文 [28, 29] 知, 如果 $D \subset \mathbb{C}$ 是单连通域, 则复值函数 F 是双调和的当且仅当 F 有如下表示:

$$F = |z|^2 G + K,$$

其中 G 和 K 都是复值调和映射. 又由文 [20, 24, 28, 29, 32] 知, G 和 K 有如下表示:

$$G = g_1 + g_2$$

和

$$K = k_1 + k_2,$$

其中 g_1, g_2, k_1 和 k_2 是 D 中的解析函数. f 的 Jacobi J_f 定义如下:

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2.$$

我们引进如下两个记号：

$$\lambda_f = ||f_z| - |f_{\bar{z}}||,\ \Lambda_f = |f_z| + |f_{\bar{z}}|.$$

由定义知：如果 $J_f \geq 0$, 则 $J_f = \lambda_f \Lambda_f$.

M. Arenović, V. Kojić 和 M. Mateljević 在文 [25] 中证明了如下结果：

定理 *AKM* 假设 ϕ: $\mathbf{S}^{n-1} \mapsto \mathbf{R}^n$ 满足 Lipschitz 条件:

$$|\phi(\xi) - \phi(\eta)| \leq L|\xi - \eta|,\ \xi,\ \eta \in \mathbf{S}^{n-1},$$

并且它的调和扩张 $u = P[\phi]$: $\mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ 是 k- 拟正则的. 则

$$|u(x) - u(y)| \leq c'|x - y|, x,\ y \in \mathbf{B}^n$$

其中 c' 仅与 L, K 和 n 有关.

最近, M. Mateljević, M. Arenović 和 V. Manojlović 改进定理 *AKM* 成如下形式 (见 [18]).

定理 *MAM* 设 h: $\overline{\mathbf{B}^n} \mapsto \mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中调和并在 $\overline{\mathbf{B}^n}$ 上连续. 则对于任意的 $x \in \mathbf{B}^n$ 和 $\mathbf{S}_r^{n-1}$ 上的切向量 T, 如下条件是等价的：

(*a*) $|h(x) - h(y)| \leq m|x - y|,\ x,\ y \in \mathbf{S}^{n-1}$.

(*b*) $|h'(x)\mathrm{T}| \leq M$.

其中 $r = |x|$. 另外, 如果 h 是 K- 拟正则映射, 则对于任意的 $x \in \mathbf{B}^n$ 有

$$|h'(x)| \leq Km.$$

3.2 主要结果和证明

在主要结果的叙述和证明之前, 我们首先引进如下有用结果 - 平面调和映射的 Schwarz 引理 ([20, 23]).

定理 *CX* 设 f 是 $\mathbf{D}$ 内的调和映射且满足 $f(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$. 则对于任意的 $z \in \mathbf{D}$ 和某个 $\theta \in [0, 2\pi]$ 有如下不等式成立,

(1) $\Lambda_f(z) \leq \frac{4(1+|f(z)|)}{\pi(1-|z|^2)}$,

(2) $|f(z)| \le \frac{4}{\pi}\arctan|z| \le \frac{4}{\pi}|z|$.

由定理 CX, 可以得到如下一类双调和映射的 Schwarz 引理.

定理 3.2.1 设 $F(z)=|z|^2G(z)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 内的双调和映射且满足 $G(0)=0$, 其中 G 是调和的. 如果 $F(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, 则

$$|F(z)| \le \frac{4}{\pi}|z|^2\arctan|z|$$

且

$$\Lambda_F(z) \le |z|^2\Lambda_G + \frac{4}{\pi}|z|\arctan|z|.$$

证明: 设 $u=Re(G(z))$. 则 u 是实值调和函数, 由调和函数的最大模原理知 $|u|<1$. 我们断言对于任意的 $z\in\mathbb{D}$ 有 $|G(z)|<1$. 反设存在 $z_0\in\mathbb{D}$ 使得 $|G(z_0)|\ge 1$. 不妨假定 $F(z_0)\in\mathbb{R}$, 如果有必要的话可用 F 代替 $\tilde{F}=e^{i\theta}F$. 然而这与 $|u|<1$ 相矛盾. 因此 $|G|<1$. 则调和映射满足定理 CX, 由定理 CX 易证定理 3.2.1 成立. □

我们先在平面内讨论定理 MAM. 由引言中的叙述可知, 定义在 $\mathbb{D}$ 内的每一个调和映射 f 均可分解为

$$f=h+\bar{g},$$

其中 h 和 g 是 $\mathbb{D}$ 内的解析函数. 设 $G(r,\theta)=\overline{g(re^{i\theta})}$ 和 $\gamma_r(\theta)=re^{i\theta}=z$. 即有 $\gamma_r'(\theta)=rie^{i\theta}$, 又由链式法则知 $G_\theta'(r,\theta)=\overline{g'(re^{i\theta})\gamma_r'(\theta)}=\overline{g'(re^{i\theta})iz}$. 令 $f=h+\overline{g}$. 因为 $h(re^{i\theta})=f(re^{i\theta})+\overline{g(re^{i\theta})}$, 所以由简单计算可得:

$$f_\theta'(z)=i(zh'(z)-\overline{zg'(z)}),\quad f_r'=e^{i\theta}h'+\overline{e^{i\theta}g'},$$

其中 $f_\theta'(z)$ 和 f_r' 分别表示 f 关于 θ 和 r 的偏导数. 易知 rf_r' 是 f_θ' 的调和共轭. 而 $f_\theta'(z)=iz(h'(z)-e^{-2i\theta}\overline{g'(z)})$ 则 $|f_\theta'(z)|=r|(f'(z)-e^{-2i\theta}\overline{g'(z)})|$.

设 $\Delta z=\rho e^{i\alpha}$. 因为 $\Delta f=\partial f\Delta z+\overline{\partial}f\Delta\bar{z}+o(\Delta z)$, 所以

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\partial f+e^{-2i\alpha}\overline{\partial}f+o(1).$$

因此, 对于固定的 α, 当 $\rho\to 0$, 我们可以计算出关于 α 方向的方向导数:

$$\partial_\alpha f = \partial f + e^{-2i\alpha}\bar{\partial} f.$$

我们用 $f'(z)$ 表示关于切空间 $T_z\mathbf{C}$ 的线性算子 $df(z) = \partial f dz + \bar{\partial} f d\bar{z}$ 关于 α 方向的方向导数.

定理 3.2.2 设 $F(z) = \lambda_1|z|^2 f(z) + \lambda_2 f(z)$ 是定义在 $\mathbf{D}$ 内的双调和映射并在 $\mathbf{D}\cup\mathbf{T}$ 上连续, 其中 λ_1, λ_2 $(\lambda_1+\lambda_2\neq 0)$ 是复常数且 f 是调和映射. 则对于每一个 $\xi\in\mathbf{D}$ 且 $r=|\xi|$ 及 $\mathbf{D}_r$ 上的单位向量 T, 如下条件是等价的:

(c) $|F(e^{i\theta_1}) - F(e^{i\theta_2})| \le m|\theta_1-\theta_2|$;

(d) $|f'(\xi)\mathrm{T}| \le M$.

证明: (c) $\Rightarrow$ (d). 由 (c) 知 $|\frac{dF(e^{i\theta})}{d\theta}| \le m$ a.e. 则 $|\frac{df(e^{i\theta})}{d\theta}| \le \frac{m}{|\lambda_1+\lambda_2|}$ a.e. 由 Poisson 表示知

$$F(z) = \frac{\lambda_1|z|^2+\lambda_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)dt.$$

通过计算得

$$\frac{\partial F(z)}{\partial\theta} = \frac{\lambda_1|z|^2+\lambda_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f'(t)dt,$$

其中 $z=re^{i\theta}$.

定义 $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$. 因此 $\gamma_r'(\theta) = rie^{i\theta} = rT$ 且 $F_\theta'(z) = (\lambda_1|z|^2 + \lambda_2)f'(z)\gamma_r'(\theta) = (\lambda_1|z|^2+\lambda_2)f'(z)rT$. 由定理 3.2.1 得

$$|F_\theta'(z)| \le \frac{4m|z||\lambda_1|z|^2+\lambda_2|}{|\lambda_1+\lambda_2|\pi}$$

及

$$|f'(\xi)\mathrm{T}| \le M,$$

其中 $M = \frac{4m}{|\lambda_1+\lambda_2|\pi}$. (d) $\Rightarrow$ (c) 由定义可直接推出. □

在复平面内, 每一个定义在单连通区域 D 内的双调和映射 F 有如下表示:

$$F = |z|^2 G + K,$$

其中 G 和 K 都是 D 内的调和映射. 但是这个表示在三维或三维以上空间内不成立. 下面这个例子可说明此问题. 设 $f:(x_1, x_2, x_3)\mapsto(x_1, x_2, x_3^2+x_1x_2)$. 显然, f 是双调和映射但不是调和映射. 它不具有分解式 $F=|z|^2G+K$. 但是我们可以证明如下结果.

定理 3.2.3 假设 F 是具有四次连续微分的函数并满足

$$F(x_1, x_2,\cdots, x_n)=|X|^2G(x_1, x_2,\cdots, x_n)+K(x_1, x_2,\cdots, x_n),$$

其中 G, K 是调和映射且 $|X|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$. 则 F 是双调和映射.

证明: 通过简单的求导运算得

$$\Delta F=2nG+4\sum_{i=1}^{n}x_iG_{x_i}.$$

由此得 ΔF 的 *Laplace* 满足如下等式

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta F) &= 12nG_{x_i^2}+4\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(G_{x_i})_{x_j^2}\\ &= 4\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(G_{x_j^2})_{x_i}\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

我们引进如下符号表示: $\mathcal{H}=\{f: f$ 定义在 $\mathbf{B}^n$ 内的调和映射$\}$ 和

$$\mathcal{BH}=\{g: g=\lambda_1|X|^2f+\lambda_2f,\ 其中\ f\in\mathcal{H},\ \lambda_1\ 和\ \lambda_2\ (\lambda_1+\lambda_2\neq 0)\ 是实常数\}.$$

由定义知, 我们有如下结果:

性质 3.2.4 对于任意的 $F\in\mathcal{BH}$, 如果 $F=\lambda_1|X|^2f+\lambda_2f$, 其中 $f\in\mathcal{H}$, 则 F 是调和的当且仅当 $\lambda_1=0$.

证明 充分性很显然, 我们只需证必要性. 因为 F 的 Laplace 满足如下等式 $\Delta F=\lambda_1(2nf+4\sum_{i=1}^{n}x_if_{x_i})$. 如果 F 是调和的, 则 $\Delta F=0$. 即

$$f(x_1, x_2,\cdots, x_n)=(\frac{c_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}}, \frac{c_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}},\cdots, \frac{c_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}}),$$

其中 $c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是实常数. 这个解在原点 O 没有意义. 因此 $\lambda_1 = 0$. □

应用定理 MAM 的证明方法, 我们得到如下结果:

定理 3.2.5 设 F 是定义在 $\mathbb{B}^n$ 内且在 $\overline{\mathbb{B}}^n$ 上连续的具有四次连续微分的函数并满足 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1|x|^2G(x_1, x_2, \cdots, x_n)+\lambda_2G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 G 是调和映射且 λ_1, λ_2 是实常数并满足 $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$. 若 $F : \overline{\mathbb{B}}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, 则对于任意的 $x \in \mathbb{B}^n$ 和 $\mathbb{S}_r^{n-1}$ 上的切向量 T, 如下条件等价:

(e) $|F(x) - F(y)| \leq m|x - y|,\ x,\ y \in \mathbb{S}^{n-1}$;

(f) $|G'(x)\mathrm{T}| \leq M$, 其中 $r = |x|$. 如果 G 还是 K- 拟正则映射, 则对于任意的 $x \in \mathbb{B}^n$ 有

(g) $|G'(x)| \leq \frac{Km}{|\lambda_1+\lambda_2|}$.

注记 3.2.6 如果 $\lambda_1 = 0$, 定理 3.2.5 就是定理 MAM. 定理 3.2.3 和性质 3.2.4 说明定理 3.2.5 是定理 MAM 的推广.

3.3 一类双调和映射的全凸性

M. Chuaqui 等在文 [26] 中给出了调和映射全凸性的定义如下:

定义 3.3.1 定义在单位圆盘上的调和映射 f 是全凸的当且仅当 f 把每一个圆周 $|z| = r < 1$ 均一一映成凸曲线.

同时 M. Chuaqui 等在文 [26] 中给出了调和映射全凸性的一个充要条件如下:

定理 CDO 设 $f = h+\overline{g}$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 内的保向调和映射. 则 f 在 $\mathbb{D}$ 内是全凸的当且仅当对于任意的 $z \in \mathbb{D}$, 有如下不等式成立

$$|zh'(z)|^2Re\{1+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\} \geq |zg'(z)|^2Re\{1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\}+Re\{z^3[h''(z)g'(z)-h'(z)g''(z)]\}.$$

下面这个定理是关于双调和映射 $F(z) = \lambda_1|z|^2f(z) + \lambda_2f(z)$ 的全凸性的一个结果.

定理 3.3.2 设 $f = h + \overline{g}$ 是 $\mathbb{D}$ 内局部单叶保向的调和映射, 其中 h 和 g 是解析的. 则 $F(z) = \lambda_1|z|^2f(z) + \lambda_2f(z)$ 是全凸的当且仅当 $f(z)$ 是全凸的, 其中 $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

证明：设 $f=h+\overline{g}$ 是 D 内局部单叶保向的调和映射, 其中 h 和 g 是解析的. 我们先计算 $|z|=r<1$ 在 f 映射下的像在某个点 $f(re^{i\theta})$ 的曲率. 计算出 f 的切向量如下：

$$\frac{\partial F}{\partial t}=(\lambda_1 r^2+\lambda_2)[ire^{it}h'(e^{it})-ire^{-it}\overline{g'(e^{it})}].$$

则 F 的曲率是

$$\mathcal{K}_F=\frac{d(\arg\frac{\partial F}{\partial t})}{ds}=\frac{d(\arg\frac{\partial F}{\partial t})}{dt}/\frac{ds}{dt},$$

即

$$\begin{aligned}|\frac{\partial F}{\partial t}|\mathcal{K}_F=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\arg\frac{\partial F(re^{it})}{\partial t}\Big) &= \operatorname{Im}\left(\frac{\frac{\partial^2 F(re^{it})}{\partial t^2}}{\frac{\partial F(re^{it})}{\partial t}}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{zF_z+\overline{z}F_{\overline{z}}-2|z|^2F_{z\overline{z}}+z^2F_{zz}+\overline{z}^2F_{\overline{z}\overline{z}}}{zF_z-\overline{z}F_{\overline{z}}}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{zf_z+\overline{z}f_{\overline{z}}+z^2f_{zz}+\overline{z}^2f_{\overline{z}\overline{z}}}{zf_z-\overline{z}f_{\overline{z}}}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\arg\frac{\partial f(re^{it})}{\partial t}\Big)\\ &= |\frac{\partial f}{\partial t}|\mathcal{K}_f.\end{aligned}$$

因为 f 在原点的某个邻域是单叶的, 则对于每一个充分小的 r, 积分 $\int_0^{2\pi}\mathcal{K}_F(re^{i\theta})d\theta$ 恒等于 2π. 然而曲率积分 $\int_0^{2\pi}\mathcal{K}_F(re^{i\theta})d\theta$ 关于任意的 r $(0<r<1)$ 是连续的且它的积分值是 2π 的整数倍, 因此曲率积分关于变量 $0<r<1$ 恒等于 2π. 换句话说, f 把每一个圆周 $|z|=r<1$ 均一一的映成凸曲线. 因此定理 3.3.2 成立. □

4. 关于调和映射的 *Bloch* 空间

4.1 引言

平面调和映射 $f(z)$ 是定义在域 $D \subset \mathbf{C}$ 内的复值调和函数, 其中 $z = x + iy$. 若 D 是单连通的, 则 $f(z)$ 有如下标准分解:

$$f = h + \overline{g},$$

其中 h 和 g 在 D 内是解析 (全纯) 的. 本章分别用 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 表示复平面和复平面内的单位圆盘, $\mathcal{H}(\mathbf{D})$ 表示 $\mathbf{D}$ 内的所有调和映射. 设 f 是定义在 $\mathbf{D}$ 内的调和映射, 则 f 可分解为 $f = h + \overline{g}$, 其中 h 和 g 在 $\mathbf{D}$ 内是解析 (全纯) 的. *Lewy* 在文 [16] 证明了: 如果 f 在 $\mathbf{D}$ 内局部单叶当且仅当 f 的 *Jacob* $J_f(z) = |h'|^2 - |g'|^2 \neq 0$, 其中 $z \in \mathbf{D}$. 我们引进如下两个记号:

$$\lambda_f = ||f_z| - |f_{\overline{z}}||, \ \Lambda_f = |f_z| + |f_{\overline{z}}|.$$

由定义知: 如果 $J_f \geq 0$, 则 $J_f = \lambda_f \Lambda_f$.

定义 4.1.1 设 $f = h + \overline{g}$ 是定义在 $\mathbf{D}$ 内的调和映射, 其中 h 和 g 是 $\mathbf{D}$ 内的解析 (全纯) 函数. 我们称

$$\|f\|_{HB} = \sup_{z\in \mathbf{D}}(1 - |z|^2)(|h'| + |g'|) + |f(0)| < \infty$$

为 f 的调和 *Bloch* 范数 (记作 HB_f), 其中 f 为调和 *Bloch* 函数.

定义 4.1.2 在定义 4.1.1 的假设条件下, 我们称

$$\|f\|_{HB^\alpha} = \sup_{z\in \mathbf{D}}(1 - |z|^2)^\alpha(|h'| + |g'|) + |f(0)| < \infty$$

为 f 的调和 $\alpha - Bloch$ 范数 (记作 HB_f^α), 其中 f 为调和 $\alpha - Bloch$ 函数. 显然调和 *Bloch* 范数是解析函数 *Bloch* 范数的推广, 即当定义 4.1.1 中 $g \equiv 0$ 时就是解析函数的 *Bloch* 范数的定义.

在本章节, 我们分别引进 *Pseudo* 距离 d 和双曲距离 ρ 如下: 对于任意的 $z, w \in \mathbf{D}$,

$$d(z, w) = |\frac{z - w}{1 - \overline{w}z}|$$

和

$$\rho(z,w)=\frac{1}{2}\log(\frac{1+d}{1-d}).$$

设 $f=h+\overline{g}$ 是 D 内的调和映射并满足 $\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)(|h'|+|g'|)<\infty$. 则对于任意的 $z\in\mathbb{D}$ 有

$$\begin{aligned}\limsup_{w\to z}\frac{f(z)-f(w)}{\rho(z,w)} &= \limsup_{r\to0}\frac{f(z+re^{i\theta})-f(z)}{\rho(z+re^{i\theta},z)}\\ &= \limsup_{r\to0}\frac{f(z+re^{i\theta})-f(z)}{r}\frac{r}{\rho(z+re^{i\theta},z)}\\ &= \max_{0\le\theta<2\pi}(1-|z|^2)|f_x(z)\cos\theta+f_y(z)\sin\theta|\\ &= \frac{1}{2}(1-|z|^2)(|f_x(z)+if_y(z)|+|f_x(z)-if_y(z)|)\\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)(|h'|+|g'|).\end{aligned}$$

由文 [11] 知, 一个解析函数复合一个调和映射结果不一定是调和的, 但一个调和映射复合任何解析函数还是调和的. 因此我们可以定义如下调和复合算子

$$HC_\phi(f)=f\circ\phi,$$

其中 $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 且 ϕ 表示单位圆盘 D 的任意解析 (全纯) 自映射. 对于任意的 $z\in\mathbb{D}$, 设

$$T_\phi(z)=\frac{(1-|z|^2)|\phi'(z)|}{1-|\phi(z)|^2}.$$

对于任意的 $z\in\mathbb{D}$, 应用 $Schwarz-Pick$ 引理得, $T_\phi(z)\le1$.

4.2 主要结果和证明

设 $M(\mathbb{D})$ 为 D 内所有 $M\ddot{o}bius$ 变换. 易知, 如果 $\phi\in M(\mathbb{D})$, 则对于任意的 $z\in\mathbb{D}$ 和 $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 有

$$\frac{|\phi'(z)|}{1-|\phi(z)|^2}=\frac{1}{1-|z|^2}$$

和

$$(1-|z|^2)\Lambda_f(\phi(z))=(1-|\phi(z)|^2)(|f(\xi)_\xi|+|f(\xi)_{\overline{\xi}}|),$$

其中 $\xi = \phi(z)$. 对于 $w \in \mathbb{D}$, 设 $\phi_w(z) \in M(\mathbb{D})$ 并有 $\phi(0) = w$. 则对于任意 $z \in \mathbb{D}$,

$$1 - |\phi_w(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{w}z|}.$$

通过简单的计算知, 对于任意的 $z \in \mathbb{D}$, 如果 $\phi \in M(\mathbb{D})$, 则

$$\frac{1-|\phi(0)|}{1+|\phi(0)|} \le \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2} = |\phi'(z)| \le \frac{1+|\phi(0)|}{1-|\phi(0)|}.$$

定理 4.2.1 设 $\beta \ge 1$ 且 $\alpha \le \beta$, 则 HC_ϕ 是 HB^α 到 HB^β 的有界算子. 若 $\alpha < \beta$, 则算子 HC_ϕ 没有下界.

注记 4.2.2 定理 4.2.1 是文 [7] 中定理 2.1 的推广. 为了证明定理 4.2.1, 先证明几个引理.

引理 4.2.3 设 $\beta \ge 1$ 且 $\alpha \le \beta$, 则 HC_ϕ 是 HB^α 到 HB^β 的有界算子当且仅当 $\|HC_\phi\|_{HB^\beta} \le M\|f\|_{HB^\alpha}$, 其中 $f \in HB_f^\alpha$ 且 $M(M \ge 0)$ 是独立的常数.

证明: 先不妨假设 $1 \le \alpha < \beta$ 并设 σ 是 $\mathbb{D}$ 内的自映射并满足 $\sigma(0) = 0$. 则 $\phi = \phi_{\phi(0)} \circ \sigma$. 对于任意的 $z \in \mathbb{D}$, 应用 Schwarz 引理知:

$$\begin{aligned}\frac{1-|z|^2}{1-|\phi(z)|^2} &= \frac{1-|z|^2}{1-|\sigma(z)|^2}\frac{1-|\sigma(z)|^2}{1-|\phi_{\phi(0)}(\sigma(z))|^2} \\ &\le \frac{1+|\phi(0)|^2}{1-|\phi(0)|^2}.\end{aligned}$$

设 $f \in HB_f^\alpha$. 对于任意的 $z \in \mathbb{D}$, 则

$$\begin{aligned}\|HC_\phi(f)\|_{HB^\beta} &= (1-|z|^2)^\beta|(f\circ\phi)_z + (f\circ\phi)_{\overline{z}}| \\ &= (1-|z|^2)^\beta(|f(\xi)_\xi| + |f(\xi)_{\overline{\xi}}||\phi'(z)|) \\ &= \frac{(1-|z|^2)^{\alpha-1}}{(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha}(1-|\phi(z)|^2)^\alpha \\ &\times (|f(\xi)_\xi| + |f(\xi)_{\overline{\xi}}|)T_\phi(z) \\ &\le \frac{(1+|\phi(0)|)^{\alpha-1}}{(1-|\phi(0)|)^{\alpha-1}}\cdot\|f\|_{HB^\alpha}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}||HC_\phi(f)||_{HB^\beta} &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\beta|(f\circ\phi)_z+(f\circ\phi)_{\overline{z}}| \\ &\le \frac{(1+|\phi(0)|)^{\alpha-1}}{(1-|\phi(0)|)^{\alpha-1}}||f||_{HB^\alpha}.\end{aligned}$$

当 $\alpha<1\le\beta$ 时, 设 $f\in HB_f^\alpha$. 对于任意的 $z\in\mathbb{D}$, 则

$$\begin{aligned}||HC_\phi(f)||_{HB^\beta} &= (1-|z|^2)^\beta|(f\circ\phi)_z+(f\circ\phi)_{\overline{z}}| \\ &= (1-|z|^2)^\beta(|f(\xi)_\xi|+|f(\xi)_{\overline{\xi}}||\phi'(z)|) \\ &= \frac{(1-|z|^2)^{\beta-1}}{(1-|\phi(z)|^2)^{\beta-1}}(1-|\phi(z)|^2)^{\beta-\alpha} \\ &\times (1-|\phi(z)|^2)^\alpha(|f(\xi)_\xi|+|f(\xi)_{\overline{\xi}}|)T_\phi(z) \\ &\le \frac{(1+|\phi(0)|)^{\beta-1}}{(1-|\phi(0)|)^{\beta-1}}\cdot||f||_{HB^\alpha}.\end{aligned}$$

所以 HC_ϕ 是 HB^α 到 HB^β 的有界算子. □

通过简单的计算, 易知:

引理 4.2.4 设 $\beta\ge1$ 且 $\alpha\le\beta$, 则 HC_ϕ 是 HB^α 到 HB^β 的有界算子有下界的充要条件是 $||HC_\phi||_{HB^\beta}\ge m||f||_{HB^\alpha}$, 其中 $f\in HB_f^\alpha$ 且 $m(m>0)$ 是独立的常数.

定理 4.2.1 的证明: 由引理 4.2.3 知, HC_ϕ 是 HB^α 到 HB^β 的有界算子. 则只需证: 若 $\alpha<\beta$, 则算子 HC_ϕ 没有下界. 任取一序列 $\{w_n\}$ 并满足 $w_n\to\partial\mathbb{D}$ $(n\to\infty)$. 对于 $\alpha>0$ 和 $z,\ w\in\mathbb{D}$, 定义

$$f_w(z)=\frac{1-|w|^2}{\alpha}[\frac{1}{\overline{w}(1-\overline{w}z)^\alpha}+\frac{1}{w(1-w\overline{z})^\alpha}].$$

则

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^\alpha[|(f_w(z))_z|+|(f_w(z))_{\overline{z}}|] &\le 2\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|z|)^\alpha}\frac{1-|w|^2}{1-|w|} \\ &\le 2^{\alpha+2}.\end{aligned}$$

另一个方面, $(1-|z|^2)^\alpha[|(f_w(w))_z|+|(f_w(w))_{\overline{z}}|]=2$. 因此

$$2 \le \|f_w\|_{HB}^{\alpha} \le 2^{\alpha+2}.$$

易知, 当 $w_n \to \partial\mathbb{D}$, f_w 局部一致收敛于 0. 如果 $1 \le \alpha < \beta$ 和 $f_n = f_{w_n}$ 以及 $\xi = \phi(z)$. 则对于任意的 $z \in \mathbb{D}$ 和 $n \in \{1, 2, \cdots\}$,

$$\begin{aligned}
& (1-|z|^2)^{\beta}[|(f_w(\phi(z)))_z| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{z}}|] \\
= & (1-|z|^2)^{\beta}[|(f_w(\phi(z)))_{\xi}| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{\xi}}|]|\phi'(z)| \\
= & (1-|z|^2)^{\beta-1}[|(f_w(\phi(z)))_{\xi}| \\
+ & |(f_w(\phi(z)))_{\bar{\xi}}|] \times (1-|\phi'(z)|^2)T_{\phi}(z).
\end{aligned}$$

因此有

$$(1-|z|^2)^{\beta}[|(f_w(\phi(z)))_{\xi}| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{\xi}}|]|\phi'(z)| \le |(f_w(\phi(z)))_{\xi}| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{\xi}}|$$

和

$$\begin{aligned}
& (1-|z|^2)^{\beta}[|(f_w(\phi(z)))_z| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{z}}|] \\
= & \frac{(1-|z|^2)^{\alpha-1}}{(1-|\phi(z)|^2)^{\alpha-1}}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha} \\
\times & (1-|\phi(z)|^2)^{\alpha}[|(f_w(\phi(z)))_{\xi}| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{\xi}}|]T_{\phi}(z) \\
\le & 2^{\alpha+2}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha} \cdot \frac{(1+|\phi(0)|)^{\alpha-1}}{(1-|\phi(0)|)^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

由上叙不等式知, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $r < 1$ 使得对于任意的 $n \in \{1, 2, \cdots\}$ 和 $|z| > 1$ 有

$$(1-|z|^2)^{\beta}[|(f_w(\phi(z)))_z| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{z}}|] < \epsilon.$$

而 $w_n \to \partial\mathbf{D}$, f_w 局部一致收敛于 0, 这意味着对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 且 $|z| \le r$ 有

$$(1-|z|^2)^{\beta}[|(f_w(\phi(z)))_z| + |(f_w(\phi(z)))_{\bar{z}}|] < \epsilon.$$

由此知当 $n\to\infty$ 有 $\|HC_\phi(f_n)\|_{HB}^\beta\to 0$. 然而 $\|f_n\|_{HB_\alpha}\geq 2$, 所以 HC_ϕ 是没有下界的. 当 $\alpha<1\leq\beta$ 时, 有

$$(1-|z|^2)^\beta[|(f_w(\phi(z)))_\xi|+|(f_w(\phi(z)))_{\overline{\xi}}|]|\phi'(z)|\leq|(f_w(\phi(z)))_\xi|+|(f_w(\phi(z)))_{\overline{\xi}}|$$

和

$$\begin{aligned}
&(1-|z|^2)^\beta[|(f_w(\phi(z)))_z|+|(f_w(\phi(z)))_{\overline{z}}|]\\
=\;&\frac{(1-|z|^2)^{\beta-1}}{(1-|\phi(z)|^2)^{\beta-1}}(1-|\phi(z)|^2)^{\beta-\alpha}\\
\times\;&(1-|\phi(z)|^2)^\alpha[|(f_w(\phi(z)))_\xi|+|(f_w(\phi(z)))_{\overline{\xi}}|]T_\phi(z)\\
\leq\;&2^{\alpha+2}(1-|\phi(z)|^2)^{\beta-\alpha}\cdot\frac{(1+|\phi(0)|)^{\beta-1}}{(1-|\phi(0)|)^{\beta-1}}.
\end{aligned}$$

由类似于情形 $1\leq\alpha<\beta$ 的讨论可知, 结果亦成立.

定理 4.2.1 证毕. □

www.[illegible].com

5. 著名极小曲面曲率猜测的简介

5.1 调和映射与极小曲面的联系

本章主要介绍平面调和映射与极小曲面之间关系. 在介绍之前, 首先回顾有关微分几何方面的一些基本知识. 平面上不自交的闭曲线称为 *Jordan* 曲线. *Jordan* 曲线分平面为两部分, 并且每一部分都以此曲线为边界, 它们中间一个是有限的, 另一个是无限的, 其中有限的区域称为初等区域. 换言之, 初等区域是 *Jordan* 曲线的内部. 例如, 正方形或矩形的内部, 圆或椭圆的内部等都是初等区域. 如果平面上的初等区域到三维 *Euclid* 空间内建立的对应是一个同胚映射, 则我们把这个映射的象称为简单曲面. 简单曲面又分参数曲面和非参数曲面, 非参数曲面又简称图. 本章 u, v 表示平面坐标, 用 x, y, z, 表示三维 *Euclid*-坐标, 则非参数曲面具有如下特殊形式:

$$z = f(x, y).$$

本章用 S 表示曲面, 则曲面的面积可表示为:

$$\int\int_D \{[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}] + [\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}] + [\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}]^2\}^{\frac{1}{2}} dudv,$$

其中

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

是 u, v 关于 x, y 的 *Jacobi* 行列式. 曲面面积是微分参数不变量.

定义 5.1.1 设 $X = \phi(U)$ 是微分同胚映射. 曲面 S 上与曲线 C 等价的曲线族定义为:

$$C:\ \{X = \phi(U(t)):\ a \le t \le b\},$$

其中

$$dX = X_u du + X_v dv.$$

定义 5.1.2 曲面 S 的第一基本形式 I 或曲面上 S 的曲线弧长微分定义如下：

$$I = ds^2 = \|dX\|^2 = dX \cdot dX = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

其中

$$E = X_u X_u,\ F = X_u X_v,\ G = X_v X_v.$$

定义 5.1.3 如果曲面上的任意一点都是正则的 (即定义 5.1.1 中 $U'(t) \neq 0$), 则称此曲面为正则曲面.

曲面 S 上的曲线 C 在点 $X_0 = X(t_0)$ 的切向量是 $X'(t_0) = X_u u'(t_0) + X_v v'(t_0)$. 曲面 S 上任意一点的法向量可表示为

$$n = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

其中

$$\begin{aligned}\|X_u \times X_v\|^2 &= [\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]^2 + [\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}]^2 + [\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}]^2 \\ &= \|X_u\|^2\|X_v\|^2 - (X_u \times X_v)^2 \\ &= EG - F^2.\end{aligned}$$

设 S 是正则曲面. 则曲面 S 上的曲线 C 在弧长参数 s 条件下的切向量 $T = X'(s)$ 具有单位长度且与向量 dT/ds 正交.

定义 5.1.4 曲面 S 上某点的法曲率定义为：

$$K(T) = \frac{dT}{ds} \cdot n.$$

由计算知：

$$\begin{aligned}K(T) &= \frac{dT}{ds} \cdot n \\ &= L(\frac{du}{ds})^2 + 2M(\frac{du}{ds})(\frac{dv}{ds}) + N(\frac{dv}{ds})^2,\end{aligned}$$

其中

$$L = X_{uu} \cdot n,\ M = X_{uv} \cdot n,\ N = X_{vv} \cdot n.$$

定义 5.1.5 微分形式 $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ 称为曲面的第二基本形式.

定义 5.1.6 我们把曲面 S 上任意一点 X_0 的法曲率的最大值 k_1 和最小值 k_2 称为主曲率. 则点 X_0 的平均曲率和高斯曲率可分别表示为 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ 和 $K = k_1k_2$. 由文([32, P_{160}])知平均曲率和高斯曲率有如下计算公式:

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2},$$
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

定义 5.1.7 一个曲面如果它每一点处的平均曲率 $H = 0$, 则称其为极小曲面. 非参数极小曲面称为极小图.

由定义可知非参数曲面 $z = f(x, y)$ 是极小图的充要条件是

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

正则曲面 $X = \phi(U)$ 是等温参数坐标当且仅当 $X_u \cdot X_v = 0$ 且 $X_u \cdot X_u = X_v \cdot X_v$. 下面介绍著名的 $Weierstrass - Enneper - Representation$ 定理.

定理 5.1.8 每一个正则极小曲面 S 都有如下的等温参数表示:

$$x_1 = Re\{\int p(1 + q^2)dw\},\ x_2 = Im\{\int p(1 - q^2)dw\},\ x_3 = Im\{\int pqdw\},$$

其中 p 和 q 分别是 $D \subset \mathbb{C}$ 内的解析函数和亚全纯函数且 p 和 q 满足如下条件:

(1) 若 $p(z_0) = 0$, 则 z_0 必是 q 的极点.

(2) 若 z_0 是 p 的 m 阶零点, 则 z_0 必是 q 的 $2m$ 阶极点.

反之, 若 p 和 q 分别是单连通域 D 内的解析函数和亚全纯函数且 p 和 q 满足如下条件:

$$x_1 = Re\{\int p(1 + q^2)dw\},\ x_2 = Im\{\int p(1 - q^2)dw\},\ x_3 = Im\{\int pqdw\}.$$

则 (x_1, x_2, x_3) 是 S 的等温参数坐标.

下面这个定理([32, P_{177}])是 $Weierstrass-Enneper-Representation$ 定理的精确形式.

定理 5.1.9 如果极小图

$$\{u(z),\ v(z),\ F(u(z),v(z)):\ u(z)+iv(z)\in\Omega\}$$

是保向等温参数. 此曲面在平面上的投影是 $\mathbb{D}$ 到 Ω 的调和映射 $w=u+iv=f(z)$ 并且它的第二伸缩商是某个解析函数的平方. 反之, 如果 $f=h+\overline{g}$ 是从 $\mathbb{D}$ 到 Ω 的保向调和映射且它的第二伸缩商 $\omega=g'/h'=q^2$, 则 (u,v,t) 是等温参数坐标, 其中

$$u=Re\{f(z)\},\ v=Im\{f(z)\},\ t=2Im\{\int_0^z q(\zeta)h'(\zeta)d\zeta\}.$$

除了第三个坐标中的符号和常数的选择外, 这个表示是唯一的.

注记 5.2.0 定理 5.1.9 中提到的映射 f 是满射.

在等温参数坐标下, 极小曲面的高斯曲率([32, P_{184}])

$$K=-\frac{|\omega'|^2}{|h'g'|(1+|\omega|)^4}.$$

下面是著名的极小曲面曲率猜测.

猜测 5.2.1 如果极小曲面 S 的平面投影是单位圆盘到单位圆盘的调和同胚映射, 则此曲面在原点的高斯曲率满足不等式

$$|K|<\frac{\pi^2}{2}=4.934\cdots.$$

事实上猜测 5.2.1 等价于如下形式:

猜测 5.2.2 设 f 是定义在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的调和映射且满足 $f(\mathbb{D})=\mathbb{D}$ 以及 $\omega=\overline{f_{\bar{z}}}/f_z=q^2$, 其中 q 是 $\mathbb{D}$ 上的解析函数. 则

$$|f_z(0)|+|f_{\bar{z}}(0)|>\frac{8}{\pi^2},$$

其中 $\frac{8}{\pi^2}$ 是最好的界.

注记 5.2.3 尽管我们不知道 $\frac{8}{\pi^2}$ 是不是猜测 5.2.1 最好的界, 但与猜测

5.2.1 相似的问题, Hengartner 和 Schober 找到了最好的界. 他们的结果如下:

定理 5.2.4([32, P_{189}]) 设 S 是非参数极小曲面并且此曲面在平面上的投影是带形区域 $\Omega = \{w: |Im\{w\}| < \frac{4}{\pi}\}$ 并假设 $\alpha = a + ib$ 是 Ω 中任意一点. 则曲面 S 上 α 点的高斯曲率 K 满足:

(1) 如果 $b = 0$, 则 $K \leq 4$;

(2) 如果 $b \neq 0$, 则 $K < 4\sec^2(2b)$.

www.docin.com

结　语

本文的第二章主要研究的是两类双调和映射的 *Laudan* 常数的存在性, 但是文中给出的 *Laudan* 常数不是最好的界, 还有许多有待改进之处, 本文在第三章给出了高维双调和映射的定义并讨论了它的一些基本的几何性质, 关于高维双调和映射的研究还处于初步阶段, 研究的空间很大. 第四章主要讨论的是调和 *Bloch* 空间, 而调和 *Bloch* 空间的研究主要是建立在解析函数的基础之上, 关于这方面的结果还不是很丰富. 文中最后一章介绍了调和映射与极小曲面的联系以及著名的曲率猜测. 以上提到的问题都是我们继续研究的对象.

www.docin.com

参考文献

[1] Clunie, J. G. & T. Sheil-Small. Harmonic univalent functions [J]. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I*, 1984, (9): 3–25.

[2] Kaljaj, D. Harmonic functions and quasiconformal mappings [D]. in serbian: Harmonijske funkcije i kuazikonformal preslikavanja, Master thesis 1998.

[3] Kaljaj, D. On harmonic quasiconformal self-mappings of the unit ball [J]. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I*, 2008, (33): 261–271.

[4] Martio, O. On harmonic quasiconformal mappings [J]. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I*, 1968, 3–10.

[5] Mateljevic, Miodrag. Distortion of harmonic functions and harmonic quasiconformal quasi-isometry [J]. *Revue Roum. Math. Pures Appl*, 2006, (51): 711–722.

[6] Mateljevic, Miodrag. $Lipschitz - type$ spaces and Quasiregular harmonic mappings in the space and Applications [M].

[7] Bers, L. Isolated singularities of minimal surfaces [J]. *Ann. of Math*, 1951, (53): 364-386.

[8] Finn, R. & R. Osserman. On the Gauss curvature of non-parametric minimal surfaces [J]. *J. Analyse Math*, 1964, (12): 351-364.

[9] Jun, S. H. Harmonic mappings and applications to minimal surfaces [D]. Ph.D. Thesis, Indiana University, 1989.

[10] Jun, S. H. Curvature estimates for minimal surfaces [J]. *Proc. Amer. Math. Soc*, 1992, (114): 527-533.

[11] Jun, S. H. Univalent hamonic on $A = \{z : |z| > 1\}$ [J]. *Proc. Amer. Math. Soc*, 1993, (114): 109–114.

[12] Happel, J. & H. Brenner. Low Reynolds Number Hydrodynamics [M]. Princeton-Hall, 1965.

[13] Hillel, P. Application of Analytic Functions to Two-Dimensional Biharmonic Analysis [J]. *Trans. Math. Soc*, 1946, (**59**): 248-279.

[14] Khuri, S. A. Biorthogonal series solution of Stokes flow problems in sectorial regions [J]. *SIAM J. Appl. Math*, 1996, (**56**): 19–39.

[15] Langlois, W. E. Slow Viscous Flow [M]. Macmillan Company, 1964.

[16] Lewy, H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings [J]. *Bull. Amer. Math. Soc*, 1936, (**42**): 689-692.

[17] Lewy, H. On the non-vanishing of the Jacobian of a homeomrphism by harmonic gardients [J]. *Ann. of Math*, 1968, (**88**): 518-529.

[18] Mateljević, M. & M. Arenović & V. Manojlović. Lipschitz-type spaces and quasiregular harmonic mappings in the space [A], *Submitted.*

[19] Wood, J. C. Lewy's theorem fails in higher dimensions [J]. *Math. Scand*, 1991, (**69**): 166.

[20] Chen, H. & P. M. Gauthier & W. Hengartner. Bloch constants for planar harmonic mappings [J]. *Proc. Amer. Math. Soc*, 2000, (**128**): 3231–3240.

[21] Dorff, M. & M. Nowark. Landau's theorem for planar harmonic mappings [J]. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2004, (**4**): 151–158.

[22] Grigoryan, A. Landau and Bloch theorems for planar harmonic mappings [J]. *Complex Var. Elliptic Equ*, 2006, (**51**): 81–87.

[23] Xinzhong, H. Estimates on Bloch constants for planar harmonic mappings [J]. *J. Math. Anal. Appl*, 2008, (**337**): 880–887.

[24] Abdulhadi, Z. & Y. Abu Muhanna. Landau's theorem for biharmonic mappings [J]. *J. Math. Anal. Appl*, 2008, (**338**): 705–709.

[25] Arenović, M. & V. Kojić & M. Mateljević. On Lipschitz continuity of harmonic quasiregular mappings on the unit ball in R^n [J]. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math*, 2008, (**33**): 315–318.

www.docin.com

[26] Chuaqui, M. & P. Duren & B. Osgood. Curvature Properties of Planar Harmonic Mappings [J]. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2004, (**4**): 127–142.

[27] Chen, H. & P. M. Gauthier. Boundedness from below of composition operators on $\alpha - Bloch$ space [J]. *Canad. Math. Bull*, 2008, (**51**): 195–204.

[28] Abdulhadi, Z. & Y. Abu Muhanna & S. Khoury. On univalent solutions of the biharmonic equations [J]. *J. Inequal. Appl*, 2005, (**5**): 469–478.

[29] Abdulhadi, Z. & Y. Abu Muhanna & S. Khoury. On some properties of solutions of the biharmonic equation [J]. *Appl. Math. Comput*, 2006, (**177**): 346–351.

[30] Heinz, E. On one-to-one harmonic mappings [J]. *Pacific J. Math*, 1959, (**9**): 101–105.

[31] Hall, R. R. On an inequality of E. Heinz [J]. *J. Analysis Math*, 1983, (**42**): 185–198.

[32] Duren, P. Harmonic Mappings in the Plane [M]. Cambridge Univ. Press, 2004.

www.docin.com

硕士期间完成的论文

1. SHL. CHEN, S. PONNUSAMY, AND X. WANG, Landau's Theorem for Certain Biharmonic Mappings, *Appl. Math. Comput.* **208**(2009), 427–433.
2. WANG. XIANTAO AND CHEN, SHAOLIN, Geometry Properties of Some Certain Classes Biharmonic Mappings. (已打印)
3. CHEN, SHAOLIN, Regions of Variability for Generalized α-Convex and Their Extreme Points. (已投稿)
4. CHEN, SHAOLIN, The *Bloch* Space of harmonic mappings. (已打印)

www.docin.com

致 谢

本文是在我的导师王仙桃教授的精心指导下完成的.

首先, 对我的导师王仙桃教授致以深深的谢意. 三年来, 我的每一点进步、每一份成果, 无不包含着他的敦敦教诲和殷殷期望. 王老师治学之严谨、学识之渊博、视野之雄阔, 置身其间, 潜移默化, 将一个对科研了解甚少的学生领进了数学研究的殿堂, 在学术上和生活上都使我受益匪浅, 更让我领悟了“学高为师、身正为范”的真谛.

感谢王老师的同时, 我还要感谢我的师母胡水清老师. 一直以来, 师母在生活上对我极为关心, 常以诚恳之心告我以处世之理. 在一定意义上, 师母就是我的另外一位人生导师. 我会永远感激她.

还要感谢在学习和实践的过程中给予我帮助和支持的徐景实老师, 张卫老师, 张学军老师, 董新汉老师, 郭瑞芝老师, 董国志老师以及何玉芸老师等多位老师, 他们对待学术求真求实, 对待工作一丝不苟, 对待生活朴实无华, 使我深受启发, 在此一并表示感谢.

求学之路艰辛, 但是求学路上有志同道合的朋友, 就会让求学之路充满乐趣. 三年走来, 师兄孙明锋, 师姐黄曼子, 李永群, 李浏兰, 以及符曦, 毛志娟, 王辉等同学的帮助和鼓励, 使我不仅收获了知识和经验, 也收获了沉甸甸的友情. 这份可贵的友情, 将是我毕生的财富.

最后要把我的谢意留给我的家人. 没有他们的关爱与付出, 我是无法完成学业的!

www.docin.com